DIE FLÄCHEN CONSTANTER KRÜMMUNG

MIT EINEM SYSTEM SPHÄRISCHER KRÜMMUNGSLINIEN

DARGESTELLT MIT HILFE VON

THETAFUNCTIONEN ZWEIER VARIABELN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

ZU

MARBURG

VORGELEGT VON

HERMANN DOBRINER

IN FRANKFURT A. M.

MARBURG A. D. LAHN.

1886.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554015_0062

SEINEM HOCHVEREHRTEN LEHRER

HERRN PROF. DR. H. WEBER

IN DANKBARKEIT GEWIDMET.

DER VERFASSER.

DIE FLÄCHEN CONSTANTER KRÜMMUNG MIT EINEM SYSTEM SPHÄRISCHER KRÜMMUNGSLINIEN DARGESTELLT MIT HILFE VON THETAFUNCTIONEN ZWEIER VARIABELN

VON

HERMANN DOBRINER

in FRANKFURT a/M.

Die Flächen constanter Krümmung mit einem System sphärischer Krümmungslinien hat zuerst ENNEPER [1] untersucht. Zur analytischen Darstellung derselben verwendet er drei Functionen einer Veränderlichen u, die erst durch Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu finden sind.

Zwei von diesen Functionen, in der ENNEPER'schen Abhandlung mit p und q bezeichnet, genügen zwei simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung,[2] für welche die beiden ersten Integrale bekannt sind.[3] Die dritte Function φ ist eine particuläre, keine willkürliche Constante enthaltende Lösung der Differentialgleichung [4]

$$\text{(a)} \qquad \frac{d\varphi}{du} = \frac{p}{gq} - \frac{\cos\varphi}{q}.$$

[1] Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen aus dem Jahre 1868, p. 421—443.

[2] a. a. O., p. 425, Gleichungssystem (7).

[3] a. a. O., p. 426, (10) und p. 431, vierte Gleichung von (26).

[4] a. a. O., p. 426, (11).

Acta mathematica. 9. Imprimé le 23 Octobre 1886.

In dieser bedeutet g die Constante, deren reciprokem Quadrat das positiv angenommene Krümmungsmass der gesuchten Fläche gleich ist.

Die Integration dieser drei Differentialgleichungen hat ENNEPER nicht ausgeführt. Er bemerkt am Schlusse seiner Abhandlung: *Die Bestimmung von p, q und φ in Function von u scheint auf grosse Schwierigkeiten zu stossen.* Auch von anderer Seite ist, soweit mir bekannt, die Lösung des Problems nicht weiter geführt worden.

Mir war bereits vor längerer Zeit die Integration der Gleichungen für p und q gelungen. Ich fand, dass diese Grössen als Quotienten von ϑ-Functionen zweier Veränderlichen darstellbar sind. Dieses Resultat liess es aber kaum wahrscheinlich erscheinen, dass auch die directe Integration der Gleichung für φ gelingen werde.

Die Beschäftigung mit der allgemeinen Theorie der Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien liess mich indessen erkennen, dass jene Gleichung in gewissem Sinne nur von secundärer Bedeutung ist.

Wenn die Mittelpunkte der die sphärischen Krümmungslinien osculirenden Kugeln sämmtlich auf einer Geraden liegen — und das ist bei den Flächen constanter Krümmung der Fall — so ist, wie ich nachgewiesen habe,[1] zur Darstellung der Fläche in erster Reihe die Kenntniss zweier Systeme von je 9 Grössen erforderlich, zwischen denen die Bedingungsgleichungen einer orthogonalen Substitution bestehn. Geometrisch besagt dieses, dass man zwei (imaginäre) Raumcurven zu bestimmen hat, die in den Richtungscosinus ihrer Tangenten, Haupt- und Binormalen jene orthogonalen Systeme liefern.

Sind für eine dieser Curven der Krümmungsradius und der Radius der Torsion in Function der unabhängigen Variabeln u gegeben, so erwächst die Aufgabe die Werthe der erwähnten neun Richtungscosinus zu bestimmen. Und diese Aufgabe führt auf eine Gleichung von der Form[2]

$$\frac{d\varphi}{du} = f(u) + f_1(u)\cos\varphi .$$

Bei ENNEPER kommen nun die imaginären Hilfscurven zwar noch nicht zur Verwendung. Aber die Gleichung (a) dient doch wesentlich

[1] CRELLE's Journal, Bd. 94, p. 153—155.

[2] Vgl. darüber die Abhandlung von HOPPE, CRELLE's Journal, Bd. 63, p. 122.

zur Aufsuchung der Elemente der einen Curve, für welche in p und q Grössen bestimmt sind, die mit ihrem Krümmungs- und Torsionsradius in einfachem Zusammenhange stehn. Die Integration von (a) wäre demnach nicht zu umgehn, wenn man nicht auf andere Weise zu dem gesuchten Orthogonal-Systeme gelangen könnte. Nun legt aber der Umstand, dass p und q ϑ-Quotienten gleich sind, die Vermuthung nahe, dass dasselbe mit dem bekannten aus den 9 Quotienten der graden ϑ-Functionen gebildeten Orthogonal-Systeme identisch sei. Und diese Vermuthung findet sich bestätigt.

Die Elemente der zweiten Hilfscurve lassen sich durch ϑ-Functionen einer Variabeln darstellen, wie nach den Ergebnissen der Enneper'schen Arbeit vorauszusehn war.

Die folgende Untersuchung geht nur anfangs den von Enneper eingeschlagenen Weg; sie schliesst sich der in meiner oben angeführten Arbeit — die ich in Citaten kurz mit *F.* bezeichnen will — gegebenen Darstellung der Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien an.

§ 1.

Unter dem Parameter v war in *F.* die Länge des Bogens der Mittelpunktscurve, gemessen von einem beliebigen Anfangspunkte bis zum Centrum einer Osculationskugel, verstanden. Jetzt soll über v in anderer Weise verfügt werden; deshalb ersetze ich überall v durch V.

Bezeichnet man

$$\frac{1}{p}\frac{dV}{dv} \text{ mit } q_1, \qquad \frac{1}{q}\frac{dV}{dv} \text{ mit } q_2,$$

$$\frac{1}{w_1} \text{ mit } p_1 \text{ und } \frac{1}{w_2} \text{ mit } p_2,$$

so lässt sich das Ergebniss des Abschnitts III d) (*F.* p. 153—155) hinsichtlich der Flächen mit gradliniger Mittelpunktscurve kurz wie folgt darstellen.

Man bestimme zwei Systeme von je 9 Grössen, l_h, m_h, n_h und

λ_h, μ_h, ν_h, $(h = 1, 2, 3)$, die einzeln den Bedingungsgleichungen einer Orthogonal-Substitution und den Differentialgleichungen:

$$(1)\qquad \frac{dl_h}{dv} = iq_1 n_h, \qquad \frac{dm_h}{dv} = q_2 n_h, \qquad \frac{dn_h}{dv} = -iq_1 l_h - q_2 m_h$$

und $(h=1,2,3)$

$$(2)\qquad \frac{d\lambda_h}{du} = ip_1\mu_h + ip_2\nu_h, \qquad \frac{d\mu_h}{du} = -ip_1\lambda_h, \qquad \frac{d\nu_h}{du} = -ip_2\lambda_h$$

genügen. In den letzteren sind q_1, q_2 zwei willkürliche Functionen von v und p_1, p_2 zwei willkürliche Functionen von u. Die Grössen l, m, n hängen allein von der Variabeln v, die λ, μ, ν allein von u ab.

Führt man ein drittes Orthogonal-System x_h, y_h, z_h durch die Gleichungen (*F.* 63)

$$(3)\qquad \left|\begin{array}{lll} x_1 = \dfrac{1}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, & x_2 = i\dfrac{\Sigma_h l_h\mu_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, & x_3 = i\dfrac{\Sigma_h l_h\gamma_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h} \\ y_1 = i\dfrac{\Sigma_h n_h\lambda_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, & y_2 = -\dfrac{\Sigma_h m_h\nu_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, & y_3 = \dfrac{\Sigma_h m_h\mu_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h} \\ z_1 = -i\dfrac{\Sigma_h m_h\lambda_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, & z_2 = -\dfrac{\Sigma_h n_h\nu_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, & z_3 = \dfrac{\Sigma_h n_h\mu_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h} \end{array}\right.$$

$$(h = 1, 2, 3)$$

ein und bestimmt unter Benutzung einer weitern willkürlichen Function von v, V, die Grössen $R\sin\sigma$ und $R\cos\sigma$ durch die Gleichungen

$$(4)\qquad \left|\begin{array}{l} R\sin\sigma = \dfrac{1}{q_1}\dfrac{dV}{dv}, \\ \dfrac{dR\cos\sigma}{dv} = \dfrac{q_2}{q_1}\dfrac{dV}{dv}, \end{array}\right.$$

so wird durch

$$(5)\qquad \left|\begin{array}{l} X_1 - V = z_1 . R\cos\sigma - y_1 . R\sin\sigma, \\ X_2 = z_2 . R\cos\sigma - y_2 . R\sin\sigma, \\ X_3 = z_3 . R\cos\sigma - y_3 . R\sin\sigma \end{array}\right.$$

eine Fläche dargestellt, deren Krümmungslinie v auf einer Kugel mit

dem Radius R liegt. Diese Kugel hat ihr Centrum auf der Axe der x_1 im Abstande V vom Nullpunkt und schneidet die Fläche unter dem Winkel σ.

Differentiirt man die in (3) gegebenen Grössen x_h, y_h, z_h nach u und nach v, so gelangt man zu den Gleichungssystemen ($F.$ 4^a und 4^b) und findet für M, P, N und Q die Werthe:

$$(6) \qquad \begin{cases} M = -p_1 y_2 - p_2 y_3, \\ P = -p_1 z_2 - p_2 z_3, \\ N = \quad q_1 x_1, \\ Q = -q_1 z_1 - q_2. \end{cases}$$

Ebenso liefert die Differentiation der Coordinaten X_1, X_2, X_3 in Rücksicht auf die Gleichungen

$$\frac{\partial X_h}{\partial u} = f x_h \quad \text{und} \quad \frac{\partial X_h}{\partial v} = g y_h$$

die Ausdrücke

$$(7) \qquad \begin{cases} f = P.R\cos\sigma - M.R\sin\sigma, \\ g = Q.R\cos\sigma + \dfrac{dV}{dv} y_1 - \dfrac{dR\sin\sigma}{dv}. \end{cases}$$

Ist l'_h, m'_h, n'_h ein zweites Orthogonal-System, welches den Gleichungen (1) genügt, so muss es mit l_h, m_h, n_h durch eine lineare Substitution von der Form:

$$\begin{aligned} l'_h &= \alpha_{h1} l_1 + \alpha_{h2} l_2 + \alpha_{h3} l_3, \\ m'_h &= \alpha_{h1} m_1 + \alpha_{h2} m_2 + \alpha_{h3} m_3, \\ n'_h &= \alpha_{h1} n_1 + \alpha_{h2} n_2 + \alpha_{h3} n_3 \end{aligned} \qquad (h=1, 2, 3)$$

verbunden sein. Ersetzt man in den Gleichungen (3) überall l_h, m_h, n_h durch l'_h, m'_h, n'_h, so geht in diesen nur die Veränderung vor, dass an Stelle der λ_h, μ_h, ν_h lineare Functionen derselben, λ'_h, μ'_h, ν'_h, treten, die sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \lambda'_h &= \alpha_{1h}\lambda_1 + \alpha_{2h}\lambda_2 + \alpha_{3h}\lambda_3, \\ \mu'_h &= \alpha_{1h}\mu_1 + \alpha_{2h}\mu_2 + \alpha_{3h}\mu_3, \\ \nu'_h &= \alpha_{1h}\nu_1 + \alpha_{2h}\nu_2 + \alpha_{3h}\nu_3. \end{aligned} \qquad (h=1, 2, 3)$$

Hieraus ziehen wir einen wichtigen Schluss. Wenn q_1 und q_2 gegebene Functionen sind und man l_h, m_h, n_h durch Integration der Gleichungen (1) zu finden hat, so ist es ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gestattet, für dieselben ein beliebiges particulares System von Integralgleichungen zu wählen, wenn nur für λ_h, μ_h, ν_h die vollständigen Integralgleichungen des Systems (2) zur Verfügung stehn.

Geht man dazu über die Constanz des Krümmungsmasses als Bedingung einzuführen, so hat man der Untersuchung zunächst die allgemeinen Formeln des Abschnitts (*F.* I.) zu Grunde zu legen, die sich auf Flächen mit doppeltgekrümmter Mittelpunktscurve beziehen, und mit dem Nachweise zu beginnen, dass es eine Folge obiger Bedingung ist, dass die Centra der osculirenden Kugeln auf einer Geraden liegen.

Die über den Parameter v getroffene specielle Verfügung hat, wie man leicht erkennt, für die Gleichungen (*F.* 1) bis (*F.* 9) nur die eine Folge gehabt, dass $\frac{dX_h^0}{dv}$ dem Richtungscosinus $(\cos a_h)$ einer Linie gleich gesetzt werden konnte. Schreibt man daher überall $\frac{dX_h^0}{dv}$ für $\cos a_h$, so sind jene Formeln ohne weiteres anwendbar.

Da die Hauptkrümmungsradien der Fläche

$$\rho_1 = \frac{f}{P} \quad \text{und} \quad \rho_2 = \frac{g}{Q}$$

sind, so hat die Gleichung

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = k$$

die andere

$$PQ = kfg \tag{8}$$

zur Folge. Multiplicirt man diese mit jeder der beiden folgenden

$$\frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{1}{g}\frac{\partial f}{\partial v} \quad (= M),$$

$$\frac{1}{P}\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{1}{f}\frac{\partial g}{\partial u} \quad (= -N),$$

so erhält man durch Integration

$$P^2 = kf^2 + F(u),$$
$$Q^2 = kg^2 + \Phi(v).$$

Wenn man aber die neuen Variabeln u_1 und v_1 durch die Gleichungen

$$du_1 = du\sqrt{-kF}, \qquad dv_1 = dv\sqrt{\Phi}$$

einführt, so gehn gleichzeitig

$$f, \qquad P, \qquad g, \qquad Q$$

in

$$f_1\sqrt{-kF}, \qquad P_1\sqrt{-kF}, \qquad g_1\sqrt{\Phi}, \qquad Q\sqrt{\Phi}$$

über, und obige Gleichungen liefern in Verbindung mit (8) die einfachen Relationen

$$(9) \qquad \left| \begin{array}{r} P = g, \\ Q = kf, \\ Q^2 - kP^2 = 1. \end{array} \right.$$

In diesen haben wir den Index 1 wieder fortgelassen, wie wir auch an Stelle von u_1, v_1 wieder u, v schreiben.

Die erste Gleichung (7) kann nun in der Form:

$$(10) \qquad M = P\frac{R\cos\sigma}{R\sin\sigma} - \frac{Q}{kR\sin\sigma}$$

geschrieben werden; hieraus folgt wegen

$$M = \frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{1}{kP}\frac{\partial Q}{\partial v}:$$

$$(11) \qquad \frac{\partial P}{\partial v} = PQ\frac{R\cos\sigma}{R\sin\sigma} - \frac{Q^2}{kR\sin\sigma}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial v} = kP^2\frac{R\cos\sigma}{R\sin\sigma} - \frac{PQ}{R\sin\sigma}.$$

Differentiirt man eine dieser Gleichungen nach u und beachtet, dass

$$N = -\frac{1}{P}\frac{\partial Q}{\partial u} = -\frac{k}{Q}\frac{\partial P}{\partial u}$$

ist, so findet man

$$\frac{\partial N}{\partial v} = QN\frac{R\cos\sigma}{R\sin\sigma} - \frac{PN}{R\sin\sigma}. \tag{12}$$

Aus (10) folgt ferner

$$\frac{\partial M}{\partial u} = -QN\frac{R\cos\sigma}{kR\sin\sigma} + \frac{PN}{kR\sin\sigma}. \tag{13}$$

Vergleicht man den obigen Werth von $\frac{\partial N}{\partial v}$ mit dem aus (*F.* 9) folgenden, so findet man

$$NQ\frac{R\cos\sigma}{R\sin\sigma} - \frac{PN}{R\sin\sigma} = \sum\nolimits_h x_h \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dX_h^0}{dv}\right) - N\sum\nolimits_h y_h \frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dX_h^0}{dv};$$

nach der dritten Gleichung (*F.* 9) ist aber wegen $g = P$:

$$\sum\nolimits_h y_h \frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dX_h^0}{dv} = \frac{P}{R\sin\sigma} - Q\frac{R\cos\sigma}{R\sin\sigma} + \frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dR\sin\sigma}{dv},$$

mithin

$$\sum\nolimits_h x_h \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dX_h^0}{dv}\right) - \frac{N}{R\sin\sigma}\frac{dR\sin\sigma}{dv} = 0$$

oder, wenn man für N seinen Werth aus (*F.* 9) substituirt:

$$\sum\nolimits_h x_h \left[\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dX_h^0}{dv}\right) - \frac{1}{(R\sin\sigma)^2}\frac{dR\sin\sigma}{dv}\frac{dX_h^0}{dv}\right] = 0.$$

Nun ist $fx_h = \frac{\partial X_h}{\partial u}$; es müsste also diese Gleichung, falls die Coefficienten von x_1, x_2, x_3 nicht sämmtlich verschwinden, eine andere von der Form

$$X_1 W_1(v) + X_2 W_2(v) + X_3 W_3(v) = W(v)$$

zur Folge haben, welche besagen würde, dass die Krümmungslinien $v = Const.$ nicht blos sphärisch sondern auch eben, also Kreise sind.

Diesen Fall, der auf Rotationsflächen führt, schliessen wir von der Betrachtung aus. Dann haben wir den Coefficienten von x_h gleich Null zu setzen und finden durch Integration:

$$\frac{dX_h^0}{dv} = c_h(R\sin\sigma)^2 \qquad (h=1, 2, 3)$$

worin c_1, c_2, c_3 drei beliebige Constanten sind. Aus dieser Relation geht hervor, dass die Mittelpunkte (X_1^0, X_2^0, X_3^0) der osculatorischen Kugelflächen auf einer Geraden liegen. Verlegt man in diese die Axe der X_1, so müssen die Constanten c_2 und c_3 verschwinden und man hat, wenn man $X_1^0 = V$ und $c_1 = c$ setzt,

$$\frac{dV}{dv} = c(R\sin\sigma)^2.$$

Da wir nunmehr auf die ersten Formeln zurückzugreifen berechtigt sind, so combiniren wir diese Gleichung mit (4) zu dem System:

$$(14) \qquad \begin{cases} R\sin\sigma = \dfrac{q_1}{c} \\ \dfrac{dR\cos\sigma}{dv} = \dfrac{q_1 q_2}{c} \\ \dfrac{dV}{dv} = \dfrac{q_1^2}{c}. \end{cases}$$

§ 2.

Aus (6) folgt ein Werth für $\frac{\partial Q}{\partial v}$, welcher mit dem Werthe aus (11) verglichen die Gleichung

$$-q_1' z_1 - q_2' - q_1 Q y_1 = kP^2 \frac{R\cos\sigma}{R\sin\sigma} - \frac{PQ}{R\sin\sigma}$$

liefert, in der $\frac{dq_1}{dv}$ und $\frac{dq_2}{dv}$ abgekürzt mit q_1' und q_2' bezeichnet sind. Ersetzt man in ihr z_1 und y_1 durch ihre Werthe aus (6) und (7), so erhält man mit Benutzung der Relation $Q^2 - kP^2 = 1$:

$$(15) \qquad cR\cos\sigma = q_1 q_2' - q_2 q_1',$$

woraus durch Differentiation und Berücksichtigung von (14) die Gleichung folgt:

$$(16) \qquad q_1 q_2'' - q_2 q_1'' = q_1 q_2.$$

Nach (*F.* 4) ist

$$\frac{\partial y_1}{\partial v} = Nx_1 - Qz_1 = q_1 x_1^2 - z_1(-q_1 z_1 - q_2)$$
$$= q_1 - q_1 y_1^2 + q_2 z_1;$$

andererseits liefert (7)

$$y_1 = \frac{cP}{q_1^2} - Q\frac{cR\cos\sigma}{q_1^2} + \frac{q_1'}{q_1^2}.$$

Hieraus folgt ein zweiter Ausdruck für $\frac{\partial y_1}{\partial v}$, welcher dem ersten gleichgesetzt folgende Gleichung ergiebt:

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{q_1'}{q_1^2}\right) = q_1 - \frac{q_1'^2}{q_1^3} - \frac{q_2^2}{q_1} + \frac{c^2}{kq_1^3} - c^2\frac{(R\cos\sigma)^2}{q_1^3}$$

oder

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{q_1'}{q_1}\right) = q_1^2 - q_2^2 + \frac{c^2}{kq_1^2} - \frac{c^2(R\cos\sigma)^2}{q_1^2}. \tag{17}$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $\frac{2q_1'}{q_1}$ und addirt rechts

$$\frac{2c^2R\cos\sigma}{q_1^2}\frac{dR\cos\sigma}{dv} - \frac{2q_2(q_1q_2' - q_2q_1')}{q_1} = 0$$

hinzu, so erhält man

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{q_1'^2}{q_1^2}\right) = 2q_1q_1' + \frac{2c^2q_1'}{kq_1^3} + c^2\frac{d}{dv}\left(\frac{(R\cos\sigma)^2}{q_1^2}\right) - 2q_2q_2'$$

und nach der Integration

$$\frac{q_1'^2}{q_1^2} = q_1^2 - q_2^2 - \frac{c^2}{kq_1^2} + \frac{c^2(R\cos\sigma)^2}{q_1^2} + \alpha, \tag{18}$$

wo α eine beliebige Constante ist.

Durch Addition von (17) und (18) geht eine Gleichung für q_1'' hervor, mittelst welcher man leicht mit Benutzung von (21) die analoge Gleichung für q_2'' aufstellt:

$$\left|\begin{array}{l} q_1'' = \alpha q_1 + 2q_1(q_1^2 - q_2^2), \\ q_2'' = (1+\alpha)q_2 + 2q_2(q_1^2 - q_2^2). \end{array}\right. \tag{19}$$

Ein Integral dieser Differentialgleichungen liefert (18), wenn man $cR\cos\sigma$ durch $(q_1 q_2' - q_2 q_1')$ ersetzt; ein zweites ergiebt die Integration der Gleichung für $2q_1'q_1'' - 2q_2'q_2''$:

$$(20)\qquad \begin{cases} q_1'^2 - (q_1 q_2' - q_2 q_1')^2 - \alpha q_1^2 - q_1^4 + q_1^2 q_2^2 = -\dfrac{c^2}{k}, \\ q_1'^2 - q_2'^2 - \alpha q_1^2 + (1+\alpha) q_2^2 - (q_1^2 - q_2^2)^2 = \beta, \end{cases}$$

wo β die Integrationsconstante ist.

Aus (20) sind q_1 und q_2 in Function von v zu bestimmen; ist dies geschehn, so liefern (14) und (15) ohne weiteres die Werthe von $R\sin\sigma$, $R\cos\sigma$ und $\dfrac{dV}{dv}$; dann sind alle von v abhängigen Quantitäten bis auf die mittelst (1) zu findenden l_h, m_h, n_h berechnet.

§ 3.

Die aus (6) folgenden Gleichungen

$$(21)\qquad \begin{cases} x_1 p_1 = \quad Py_3 - Mz_3, \\ x_1 p_2 = -Py_2 + Mz_2 \end{cases}$$

differentiire man nach u und setze zur Abkürzung

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = -(My_1 + Pz_1) = -w;$$

man hat dann

$$(22)\qquad \begin{cases} p_1' x_1 - p_1 w = \quad \dfrac{\partial P}{\partial u} y_3 - \dfrac{\partial M}{\partial u} z_3 \\ p_2' x_1 - p_2 w = -\dfrac{\partial P}{\partial u} y_2 + \dfrac{\partial M}{\partial u} z_2. \end{cases}$$

Leitet man hieraus die Determinanten-Gleichung

$$x_1^2 (p_1' p_2 - p_2' p_1) = \left(M\frac{\partial P}{\partial u} - P\frac{\partial M}{\partial u}\right)(z_2 y_3 - z_3 y_2)$$

ab und beachtet, dass nach (13), (10), (6) und (14)

$$M\frac{\partial P}{\partial u} - P\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{N}{k^2 R \sin\sigma}(Q^2 - kP^2) = \frac{N}{k^2 R \sin\sigma} = \frac{c}{k^2}x_1$$

ist, so gelangt man zu der ersten Gleichung für p_1 und p_2:

$$p_1' p_2 - p_2' p_1 = -\frac{c}{k^2}. \tag{23}$$

Mit Hilfe von (21) und (22) bilden wir ferner folgende Gleichungen:

$$x_1^2(p_1^2 + p_2^2) = (My_1 + Pz_1)^2 + x_1^2(M^2 + P^2)$$
$$= M^2 + P^2 - (Mz_1 - Py_1)^2,$$

$$x_1^2(p_1 p_1' + p_2 p_2') - x_1 w(p_1^2 + p_2^2)$$
$$= (My_1 + Pz_1)\left(\frac{\partial M}{\partial u}y_1 + \frac{\partial P}{\partial u}z_1\right) + x_1^2\left(M\frac{\partial M}{\partial u} + P\frac{\partial P}{\partial u}\right),$$

$$x_1^2(p_1'^2 + p_2'^2) - 2x_1 w(p_1 p_1' + p_2 p_2') + w^2(p_1^2 + p_2^2)$$
$$= \left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial M}{\partial u}z_1 - \frac{\partial P}{\partial u}y_1\right)^2.$$

Wenn man in der letzten derselben $(p_1 p_1' + p_2 p_2')$ durch seinen Werth aus der zweiten und dann $w^2 = (My_1 + Pz_1)^2$ durch seinen Werth aus der ersten ersetzt, so erhält man:

$$x_1^3(p_1'^2 + p_2'^2) - x_1^3(p_1^2 + p_2^2)^2$$
$$= -x_1^3(p_1^2 + p_2^2)(M^2 + P^2) + x_1\left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)^2 + x_1\left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)^2 - x_1\left(\frac{\partial M}{\partial u}z_1 - \frac{\partial P}{\partial u}y_1\right)^2$$
$$+ 2x_1^2(p_1^2 + p_2^2)\left(\frac{\partial M}{\partial u}y_1 + \frac{\partial P}{\partial u}z_1\right) - 2x_1^2(M^2 + P^2)\left(\frac{\partial M}{\partial u}y_1 + \frac{\partial P}{\partial u}z_1\right)$$
$$+ 2x_1^2(My_1 + Pz_1)\left(M\frac{\partial M}{\partial u} + P\frac{\partial P}{\partial u}\right).$$

Nun füge man rechts

$$\frac{q_1^2 x_1^3}{k}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{q_1^2 x_1^3}{k}(M^2 + P^2) + \frac{q_1^2 x_1^3}{k}(Mz_1 - Py_1)^2 = 0$$

hinzu, bringe die Glieder mit $(p_1^2 + p_2^2)$ auf die rechte Seite und dividire die ganze Gleichung durch x_1^3; dann erscheint sie nach einer einfachen Umformung in folgender Gestalt:

$$p_1'^2 + p_2'^2 - (p_1^2 + p_2^2)^2 + A(p_1^2 + p_2^2) = B, \tag{24}$$

wo

$$A = M^2 + P^2 - \frac{2}{x_1}\left(\frac{\partial M}{\partial u} y_1 + \frac{\partial P}{\partial u} z_1\right) - \frac{q_1^2}{k}(1 - y_1^2 - z_1^2),$$

$$B = \frac{1}{x_1^2}\left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{x_1^2}\left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{x_1^2}\left(\frac{\partial M}{\partial u} z_1 - \frac{\partial P}{\partial u} y_1\right)^2$$

$$- \frac{2}{x_1}\left(P\frac{\partial M}{\partial u} - M\frac{\partial P}{\partial u}\right)(Py_1 - Mz_1) - \frac{q_1^2}{k}(M^2 + P^2) + \frac{q_1^2}{k}(Mz_1 - Py_1)^2.$$

Nun sind nach (10), (7) und (6) die Grössen M, y_1 und z_1 ganze lineare Functionen von P und Q mit Coefficienten, die nur von v abhängen; ein gleiches gilt von

$$\frac{1}{x_1}\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{q_1}{N}\frac{\partial M}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{1}{x_1}\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{q_1}{N}\frac{\partial P}{\partial u}$$

und, wie sich leicht zeigen lässt, von

$$(Mz_1 - Py_1) \quad \text{und} \quad \frac{1}{x_1}\left(\frac{\partial M}{\partial u} z_1 - \frac{\partial P}{\partial u} y_1\right).$$

Erinnert man sich noch, dass oben die Determinante

$$M\frac{\partial P}{\partial u} - P\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{c}{k^2} x_1$$

befunden wurde, so ist leicht zu übersehn, dass A und B als ganze Functionen zweiten Grades von P und Q darstellbar sind. Es zeigt sich aber, dass von den Gliedern mit P und Q nur die quadratischen übrigbleiben, und dass auch diese verschwinden, wenn man die Relation $Q^2 - kP^2 = 1$ hinzuzieht. A und B sind also gewissen nur von v abhängigen Ausdrücken gleich. Diese reduciren sich aber, wenn man

die Integrale (20) hinzuzieht, auf blosse Constanten, so dass schliesslich für A und B folgende Werthe hervorgehn:

$$A = \frac{\alpha - 1}{k}$$

$$B = \frac{\beta - \alpha}{k^2}.$$

In (23) und (24) haben wir nun die gesuchten Differentialgleichungen für p_1 und p_2:

$$(25) \quad \begin{cases} p_1' p_2 - p_2' p_1 = -\frac{c}{k^2}, \\ p_1'^2 + p_2'^2 - (p_1^2 + p_2^2)^2 + \frac{\alpha - 1}{k}(p_1^2 + p_2^2) = \frac{\beta - \alpha}{k^2}. \end{cases}$$

Sie sind die Integrale der Gleichungen zweiter Ordnung:

$$(26) \quad \begin{cases} p_1'' = \frac{1 - \alpha}{k} p_1 + 2p_1(p_1^2 + p_2^2), \\ p_2'' = \frac{1 - \alpha}{k} p_2 + 2p_2(p_1^2 + p_2^2), \end{cases}$$

welche von wesentlich derselben Form sind, wie die des Systems (19), denen q_1 und q_2 zu genügen haben. Indessen ist es eine für die Integration vortheilhafte Vereinfachung, dass die Coefficienten von p_1 und p_2 einander gleich sind. Wir beginnen daher mit der Integration der Gleichungen (25) und lassen dann die des Systems (20) folgen.

§ 4.

Es ist

$$(p_1' p_1 + p_2' p_2)^2 = (p_1^2 + p_2^2)(p_1'^2 + p_2'^2) - (p_1' p_2 - p_2' p_1)^2,$$

mithin nach (25)

$$(p_1' p_1 + p_2' p_2)^2 = (p_1^2 + p_2^2)^3 - \frac{\alpha - 1}{k}(p_1^2 + p_2^2)^2 + \frac{\beta - \alpha}{k^2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{c^2}{k^4},$$

oder, wenn

$$p_1^2 + p_2^2 = p$$

gesetzt wird,

$$(27)\qquad \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\frac{dp}{du}\right)^2 = p^3 - \frac{\alpha - 1}{k} p^2 + \frac{\beta - \alpha}{k^2} p - \frac{c^2}{k^4}, \\ \frac{1}{4}\left(\frac{dp}{du}\right)^2 = (p - s_1)(p - s_2)(p - s_3), \end{cases}$$

wenn man mit s_1, s_2, s_3 die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$p^3 - \frac{\alpha - 1}{k} p^2 + \frac{\beta - \alpha}{k^2} p - \frac{c^2}{k^4} = 0$$

bezeichnet.

Mittelst ϑ-Functionen einer Variabeln lässt sich also p als Function von u darstellen.

Es seien die vier Functionen $\vartheta_{00}(u)$, $\vartheta_{01}(u)$, $\vartheta_{10}(u)$ und $\vartheta_{11}(u)$ durch die Reihenentwicklungen

$$\vartheta_{gh}(u) = \sum_{-\infty, +\infty}^{m} e^{\omega\left(m+\frac{g}{2}\right)^2 + 2\left(m+\frac{g}{2}\right)\left(u+\frac{\pi i h}{2}\right)} \qquad (g, h = 0, 1)$$

definirt und mit ϑ_{00}, ϑ_{01}, ϑ_{10} die Werthe von $\vartheta_{00}(u)$, $\vartheta_{01}(u)$, $\vartheta_{10}(u)$ für das Argument Null bezeichnet.

Dann setze ich

$$(28)\qquad \begin{cases} p - s_1 = s\,\dfrac{\vartheta_{00}^2(u_1)}{\vartheta_{00}^2 \vartheta_{11}^2(u_1)}, \\ p - s_2 = s\,\dfrac{\vartheta_{01}^2(u_1)}{\vartheta_{01}^2 \vartheta_{11}^2(u_1)}, \\ p - s_3 = s\,\dfrac{\vartheta_{10}^2(u_1)}{\vartheta_{10}^2 \vartheta_{11}^2(u_1)} \end{cases}$$

und gelange durch Anwendung der Formeln

$$\vartheta_{00}^2 \vartheta_{01}^2(u) - \vartheta_{01}^2 \vartheta_{00}^2(u) = \vartheta_{10}^2 \vartheta_{11}^2(u),$$

$$\vartheta_{10}^2 \vartheta_{00}^2(u) - \vartheta_{00}^2 \vartheta_{10}^2(u) = \vartheta_{01}^2 \vartheta_{11}^2(u),$$

$$\vartheta_{10}^2 \vartheta_{01}^2(u) - \vartheta_{01}^2 \vartheta_{10}^2(u) = \vartheta_{00}^2 \vartheta_{11}^2(u)$$

zu den Gleichungen:

$$s_1 - s_2 = s\frac{\vartheta_{10}^2}{\vartheta_{00}^2\vartheta_{01}^2}$$

$$s_3 - s_1 = s\frac{\vartheta_{01}^2}{\vartheta_{00}^2\vartheta_{10}^2}$$

$$s_3 - s_2 = s\frac{\vartheta_{00}^2}{\vartheta_{01}^2\vartheta_{10}^2},$$

die zur Bestimmung des Moduls ω und der neu eingeführten Constanten s dienen können. Man kann sie jedoch durch die nachstehenden Gleichungen

$$(29)\qquad \begin{cases} s_1 = -s\dfrac{\vartheta_{00}^2(a)}{\vartheta_{00}^2\vartheta_{11}^2(a)}, \\ s_2 = -s\dfrac{\vartheta_{01}^2(a)}{\vartheta_{01}^2\vartheta_{11}^2(a)}, \\ s_3 = -s\dfrac{\vartheta_{10}^2(a)}{\vartheta_{01}^2\vartheta_{11}^2(a)} \end{cases}$$

ersetzen, wenn man eine weitere Constante a benutzt, die durch eine dieser Gleichungen definirt ist.

Aus (28) folgt

$$\frac{1}{2}\frac{dp}{du_1} = -\frac{s\vartheta_{11}'}{\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10}}\frac{\vartheta_{00}(u_1)\vartheta_{10}(u_1)\vartheta_{01}(u_1)}{\vartheta_{11}^3(u_1)},$$

woraus in Verbindung mit (27) und (28) der Zusammenhang zwischen u_1 und u hervorgeht:

$$\left(\frac{du_1}{du}\right)^2 = \frac{s}{\vartheta_{11}'^2}$$

$$(30)\qquad \frac{du_1}{du} = \frac{\sqrt{s}}{\vartheta_{11}'}.$$

Unter $\sqrt{s}$ ist eine beliebige der beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 = s$ verstanden.

Ersetzt man in der ersten Gleichung von (28) s_1 durch seinen Werth aus (29), so erhält man

$$p = \frac{s}{\vartheta_{00}^2\vartheta_{11}^2(u_1)\vartheta_{11}^2(a)}\left[\vartheta_{00}^2(u_1)\vartheta_{11}^2(a) - \vartheta_{00}^2(a)\vartheta_{11}^2(a)\right],$$

das ist

$$p = -s\frac{\vartheta_{11}(u_1+a)\vartheta_{11}(u_1-a)}{\vartheta_{11}^2(u_1)\vartheta_{11}^2(a)}. \tag{31}$$

Nun giebt (23)

$$p_1'p_2 - p_2'p_1 = -\frac{c}{k^2},$$

folglich

$$\frac{p_1'p_2 - p_2'p_1}{p_1^2+p_2^2} = -\frac{c}{k^2p}$$

und

$$\frac{d}{du}\left(\operatorname{arctg}\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{c\vartheta_{11}^2(u_1)\vartheta_{11}^2(a)}{k^2s\vartheta_{11}(u_1+a)\vartheta_{11}(u_1-a)}.$$

Es ist aber

$$\vartheta_{11}'(u_1+a)\vartheta_{11}(u_1-a) - \vartheta_{11}'(u_1-a)\vartheta_{11}(u_1+a) = A\vartheta_{11}(u_1+a)\vartheta_{11}(u_1-a) + B\vartheta_{11}^2(u_1),$$

$$A = \frac{2\vartheta_{11}'(a)}{\vartheta_{11}(a)}, \qquad B = -\frac{\vartheta_{11}'\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta_{11}^2(a)};$$

also

$$B\frac{\vartheta_{11}^2(u_1)}{\vartheta_{11}(u_1+a)\vartheta_{11}(u_1-a)} = \frac{d}{du_1}\left[\log\frac{\vartheta_{11}(u_1+a)}{\vartheta_{11}(u_1-a)}\right] - A,$$

und mithin

$$\frac{d}{du_1}\left(\operatorname{arctg}\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{du}{du_1}\frac{c\vartheta_{11}^2(a)}{k^2sB}\left\{\frac{d}{du}\left[\log\frac{\vartheta_{11}(u_1+a)}{\vartheta_{11}(u_1-a)}\right] - A\right\}.$$

Aus der cubischen Gleichung, deren Wurzeln s_1, s_2, s_3 sind, folgt die Relation

$$\frac{c^2}{k^4} = s_1s_2s_3 = -\frac{s^3\vartheta_{00}^2(a)\vartheta_{01}^2(a)\vartheta_{10}^2(a)}{\vartheta_{00}^2\vartheta_{01}^2\vartheta_{10}^2\vartheta_{11}^6(a)},$$

$$\frac{c}{k^2} = \frac{\sqrt{-1}\,s\sqrt{s}\,\vartheta_{00}(a)\vartheta_{01}(a)\vartheta_{10}(a)}{\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10}\vartheta_{11}^3(a)},$$

welche unter Zuhilfenahme von (30) den Werth des Factors vor der Klammer zu berechnen gestattet. Versteht man unter $\sqrt{s}$ nach (30) $\vartheta_{11}'\frac{du_1}{du}$, so ist die Wurzel $\sqrt{-1}$ eindeutig bestimmt durch die eindeutigen Werthe der übrigen in der Gleichung vorkommenden Grössen und soll

fortan mit i bezeichnet werden. Der Factor vor der Klammer bestimmt sich zu $-\frac{i}{2}$, wenn man beachtet, dass

$$\vartheta_{11}(2a) = \frac{2\vartheta_{00}(a)\vartheta_{01}(a)\vartheta_{10}(a)\vartheta_{11}(a)}{\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10}}$$

ist.

Führt man noch eine neue Variable u_2 durch die Gleichung

$$du_2 = -\frac{A}{2}\,du_1$$

(32)

$$du_2 = -\frac{\vartheta'_{11}(a)}{\vartheta_{11}(a)}\,du_1$$

ein, so lautet das Integral der obenstehenden Gleichung:

$$\operatorname{arctg}\frac{p_1}{p_2} = -iu_2 - i\log\sqrt{\frac{\vartheta_{11}(u_1+a)}{\vartheta_{11}(u_1-a)}},$$

$$i\frac{p_1}{p_2} = \frac{e^{u_2}\vartheta_{11}(u_1+a) - e^{-u_2}\vartheta_{11}(u_1-a)}{e^{u_2}\vartheta_{11}(u_1+a) + e^{-u_2}\vartheta_{11}(u_1-a)}.$$

Zur Berechnung von p_1 und p_2 haben wir noch den Werth von $p = p_1^2 + p_2^2$ aus (31) heranzuziehn. Wir ersetzen zuvor in demselben s durch $\left(\frac{du_1}{du}\vartheta'_{11}\right)^2$ und finden, indem wir über das Vorzeichen von p_1 beliebig verfügen:

(33)

$$\left|\begin{aligned} p_1 &= \vartheta'_{11}\frac{du_1}{du}\cdot\frac{e^{u_2}\vartheta_{11}(u_1+a) - e^{-u_2}\vartheta_{11}(u_1-a)}{2\vartheta_{11}(a)\vartheta_{11}(u_1)} \\ p_2 &= i\vartheta'_{11}\frac{du_1}{du}\cdot\frac{e^{u_2}\vartheta_{11}(u_1+a) + e^{-u_2}\vartheta_{11}(u_1-a)}{2\vartheta_{11}(a)\vartheta_{11}(u_1)}. \end{aligned}\right.$$

Hieraus geht hervor, dass p_1 und p_2 als Functionen von u_1 und u_2 betrachtet dreifach periodisch sind.

§ 5.

Zur Bestimmung der Grössen q_1 und q_2 hat man auf die Gleichungen (20) zurückzugehn. Transformirt man dieselben durch die Substitution:

$$(34)\qquad \left|\begin{array}{l} q_1^2 = \xi_1\xi_2, \\ q_2^2 = (1-\xi_1)(1-\xi_2), \end{array}\right.$$

so findet man:

$$\frac{\xi_1'^2\xi_2(\xi_2-\xi_1)}{4\xi_1(1-\xi_1)} + \frac{\xi_2'^2\xi_1(\xi_1-\xi_2)}{4\xi_2(1-\xi_2)} = -\frac{c^2}{k} + \xi_1\xi_2(\alpha-1) + \xi_1^2\xi_2 + \xi_2^2\xi_1,$$

$$\frac{\xi_1'^2(\xi_2-\xi_1)}{4\xi_1(1-\xi_1)} + \frac{\xi_2'^2(\xi_1-\xi_2)}{4\xi_2(1-\xi_2)} = \beta-\alpha+(\xi_1+\xi_2)(\alpha_1-1) + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_1\xi_2$$

und daraus:

$$\frac{\xi_1'^2(\xi_2-\xi_1)^2}{4\xi_1(1-\xi_1)} = -\frac{c^2}{k} - (\beta-\alpha)\xi_1 - (\alpha-1)\xi_1^2 - \xi_1^3,$$

$$\frac{\xi_2'^2(\xi_1-\xi_2)^2}{4\xi_2(1-\xi_2)} = -\frac{c^2}{k} - (\beta-\alpha)\xi_2 - (\alpha-1)\xi_2^2 - \xi_2^3.$$

Hält man mit der cubischen Gleichung

$$p^3 - \frac{\alpha-1}{k}p^2 + \frac{\beta-\alpha}{k^2}p - \frac{c^2}{k^4} = 0,$$

deren Wurzeln mit s_1, s_2, s_3 bezeichnet wurden, die Gleichung

$$\xi^3 + (\alpha-1)\xi^2 + (\beta-\alpha)\xi + \frac{c^2}{k} = 0$$

zusammen, so erkennt man dass ihre Wurzeln

$$-ks_1, \qquad -ks_2, \qquad -ks_3$$

sind. Mithin kann man, wenn zur Abkürzung

$$\xi(1-\xi)(-ks_1-\xi)(-ks_2-\xi)(-ks_3-\xi) = R(\xi)$$

gesetzt wird, den Gleichungen für ξ_1' und ξ_2' auch die Form geben

$$\frac{1}{2}\xi_1'(\xi_1-\xi_2) = \sqrt{R(\xi_1)}, \qquad \frac{1}{2}\xi_2'(\xi_2-\xi_1) = \sqrt{R(\xi_2)}.$$

Aus diesen folgen die weiteren:

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{\xi_1 d\xi_1}{2\sqrt{R(\xi_1)}} + \dfrac{\xi_2 d\xi_2}{2\sqrt{R(\xi_2)}} = dv \\ \dfrac{d\xi_1}{2\sqrt{R(\xi_1)}} + \dfrac{d\xi_2}{2\sqrt{R(\xi_2)}} = 0. \end{cases}$$

Das Problem führt also auf hyperelliptische Integrale erster Gattung und macht die Einführung von ϑ-Functionen zweier Variabeln nothwendig.

§ 6.

Ich gebe nun die bei der Umkehrung der Integrale in Anwendung kommenden Formeln und zwar unter Zugrundelegung von Krazer's *Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen*, (Leipzig, Teubner 1882), und mit Benutzung seiner Terminologie.

Der dort auf Seite 49 gegebenen Darstellung der 15 ϑ-Quotienten durch zwei unabhängige Veränderliche x_1 und x_2 entnehme ich die beiden ersten Gleichungen:

$$(a)\qquad \begin{cases} \dfrac{\vartheta(w_1)(v)}{\vartheta(w_3)(v)} = \dfrac{[124][125][126]}{[234][235][236]}\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \\ \dfrac{\vartheta(w_2)(v)}{\vartheta(w_3)(v)} = \dfrac{[124][125][126]}{[134][135][136]}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-x_2}. \end{cases}$$

Differentiirt man dieselben vollständig, stellt die links auftretenden Determinanten-Ausdrücke, — als θ-Functionen zweiter Ordnung aufgefasst, — durch ϑ-Producte linear dar und substituirt für die ϑ-Functionen wiederum ihre Ausdrücke in x_1, x_2, so erhält man

$$(b)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{2r_1} + \dfrac{dx_2}{2r_2} = (-1)^{(w_1w_2)(w_3)'}\sqrt{(-1)^{(w_1w_2)(w_1w_3)'}}\dfrac{[234][235][236]}{[134][135][136]}\dfrac{dc_3}{[123]}, \\ \dfrac{x_1dx_1}{2r_1} + \dfrac{x_2dx_2}{2r_2} = (-1)^{(w_1w_2w_3)(w_1)'}\sqrt{(-1)^{(w_1w_2)(w_1w_3)'}}\dfrac{[234]^2[235]^2[236]^2}{[124][125][126][134][135][136]}\dfrac{dc_1}{[123]}, \end{cases}$$

worin:

$$(c)\quad \left\{\begin{array}{l} r_1 = (-1)^{(w_1w_2)(w_1w_3)'}\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-p^2x_1}\sqrt{1-q^2x_1}\sqrt{1-r^2x_1}, \\ r_2 = \sqrt{x_2}\sqrt{1-x_2}\sqrt{1-p^2x_2}\sqrt{1-q^2x_2}\sqrt{1-r^2x_2}; \\ p^2 = (-1)^{(w_1w_3)(w_2w_4)'}\dfrac{[125]^2[126]^2}{[235]^2[236]^2}, \quad q^2 = (-1)^{(w_1w_3)(w_2w_5)'}\dfrac{[126]^2[124]^2}{[236]^2[234]^2}, \\ r^2 = (-1)^{(w_1w_3)(w_2w_6)'}\dfrac{[124]^2[125]^2}{[234]^2[235]^2}; \\ dc_i = dv_1\left(\dfrac{\partial\vartheta(w_i)(v)}{\partial v_1}\right)_{(v)=(0)} + dv_2\left(\dfrac{\partial\vartheta(w_i)(v)}{\partial v_2}\right)_{(v)=(0)}; \\ [\lambda\mu\nu] = \vartheta(w_\lambda w_\mu w_\nu)(0). \end{array}\right.$$

Das Symbol $(\varepsilon)(\eta)'$, bezogen auf zwei beliebige Charakteristiken

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix}\varepsilon_1, & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1', & \varepsilon_2'\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\eta) = \begin{pmatrix}\eta_1, & \eta_2\\ \eta_1', & \eta_2'\end{pmatrix},$$

bedeutet die Summe $\varepsilon_1\eta_1' + \varepsilon_2\eta_2'$.

Diesen Formeln liegt keine Festsetzung über die Reihenfolge der ungraden Charakteristiken $w_1, \ldots, w_6$ zu Grunde; ich bestimme nun, dass unter w_1, w_2, w_3 drei Charakteristiken zu verstehn seien, die (o) zur Summe haben, und unter w_4, w_5, w_6 die drei andern Charakteristiken, welche gleichfalls summirt (o) ergeben. Ferner schreibe ich in (a), (b) und (c) ξ_1, ξ_2 an Stelle von x_1, x_2, vertausche die Charakteristiken w_1, w_2, w_3 mit resp. w_4, w_5, w_6 und vermehre die Argumente um das halbe Periodensystem $\left(\frac{1}{2}kw_6\right)$, unter $(k) = \begin{pmatrix}k_1, & k_2\\ k_1', & k_2'\end{pmatrix}$ eine beliebige Charakteristik verstehend. Vergleicht man dann die entstandenen Formeln mit (34) und (35) und beachtet, dass die Vorzeichen von q_1 und q_2 sowohl als von den Wurzeln $\sqrt{R(\xi_1)}$ und $\sqrt{R(\xi_2)}$ noch willkürlich sind, so erhält man unter Benutzung der Zeichen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ für ± 1:

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{l} ks_1 = (-1)^{(w_5)(w_1)'}\dfrac{c_{42}^2c_{43}^2}{c_{62}^2c_{63}^2}, \\ ks_2 = (-1)^{(w_5)(w_2)'}\dfrac{c_{43}^2c_{41}^2}{c_{63}^2c_{61}^2}, \\ ks_3 = (-1)^{(w_5)(w_3)'}\dfrac{c_{41}^2c_{42}^2}{c_{61}^2c_{62}^2}; \end{array}\right.$$

$$(37)\qquad \begin{cases} q_1 = \varepsilon_1 e^{-\frac{\pi i}{2}(kw_6)(w_5)'} \dfrac{C_4 \vartheta(kw_5)(v)}{C_6 \vartheta(k)(v)}, \\ q_2 = \varepsilon_2 e^{-\frac{\pi i}{2}(kw_6)(w_4)'} \dfrac{C_5 \vartheta(kw_4)(v)}{C_6 \vartheta(k)(v)}; \end{cases}$$

$$(38)\qquad \begin{cases} dc_6 = D_1 c_6 . dv_1 + D_2 c_6 . dv_2 = 0, \\ dc_4 = D_1 c_4 . dv_1 + D_2 c_4 . dv_2 = C dv, \end{cases}$$

wenn zur Abkürzung:

$$(39)\qquad \begin{cases} \vartheta(w_i w_k)(0) = c_{ik}, \qquad \vartheta(0)(0) = c_0; \\ c_{41}c_{42}c_{43} = C_4, \qquad c_{51}c_{52}c_{53} = C_5, \qquad c_{61}c_{62}c_{63} = C_6; \\ \left(\dfrac{\partial \vartheta(w_i)(v)}{\partial v_1}\right)_{(v)=(0)} = D_1 c_i, \qquad \left(\dfrac{\partial \vartheta(w_i)(v)}{\partial v_2}\right)_{(v)=(0)} = D_2 c_i; \\ C = \varepsilon_3 \sqrt{-\dfrac{c^2}{k}} \cdot \dfrac{c_0 C_5 C_6}{C_4^2} e^{\frac{\pi i}{2}(w_6)(w_5)'} \end{cases}$$

gesetzt wird.

Dem Ausdruck für C kann man auch die einfachere Form

$$(40)\qquad C = \varepsilon_3 e^{\frac{\pi i}{2}(w_6)(w_4)'} \frac{c_0 C_5}{C_6}$$

geben, weil

$$\frac{c^2}{k} = k^3 s_1 s_2 s_3 = \frac{C_4^4}{C_6^4}$$

und $e^{\frac{\pi i}{2}(w_6)(w_6)'} = \sqrt{-1}$ ist.

Aus (38) folgt

$$(41)\qquad \begin{cases} dv_1 = \quad \Delta . D_2 c_6 . dv, \\ dv_2 = -\Delta . D_1 c_6 . dv \end{cases}$$

und

$$\Delta [D_1 c_4 . D_2 c_6 - D_1 c_6 . D_2 c_4] = \varepsilon_3 e^{\frac{\pi i}{2}(w_6)(w_4)'} \frac{c_0 C_5}{C_6}.$$

Die Determinante links ist aber bis auf das Zeichen gleich [1]

$$c_0 c_{51} c_{52} c_{53} = c_0 C_5,$$

[1] Vgl. Weber, *Anwendung der Thetafunctionen etc.*, Mathematische Annalen, Bd. 14, p. 182, Gleichungssystem (9).

folglich nach entsprechender Verfügung über ε_3:

$$\Delta = \frac{e^{\frac{\pi i}{2}(w_6)(w_4)'}}{C_6}. \tag{42}$$

Setzt man ferner $\varepsilon_1 = \varepsilon_3(-1)^{(w_5)(w_6)'}$ und $\varepsilon_2 = -\varepsilon_3$, so kann man mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\frac{dc_4}{dv} = c_4' = \varepsilon_3 e^{\frac{\pi i}{2}(w_6)(w_4)'}\frac{c_0 C_5}{C_6}, \qquad \frac{dc_5}{dv} = c_5' = -\varepsilon_3 e^{\frac{\pi i}{2}(w_6)(w_4)'}(-1)^{(w_6)(e)'}\frac{c_0 C_4}{C_6}, \tag{42'}$$

$$\frac{dc_6}{dv} = c_6' \qquad 0$$

für q_1 und q_2 folgende Ausdrücke aufstellen:

$$\left|\begin{array}{l} q_1 = i_1 \dfrac{c_5'\vartheta(kw_5)(v)}{c_0\vartheta(k)(v)}, \\ q_2 = i_2 \dfrac{c_4'\vartheta(kw_4)(v)}{c_0\vartheta(k)(v)}, \end{array}\right. \tag{43}$$

in denen

$$\left|\begin{array}{l} i_1 = -ie^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_5)'}(-1)^{(w_5)(w_6)'}, \\ i_2 = -e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_4)'}(-1)^{(w_4)(w_5)'} \end{array}\right. \tag{43'}$$

ist. Von den in (42′) angeführten Werthen für c_4', c_6' und c_5' ergeben sich die beiden ersten unmittelbar aus (38) und (40); der letzte folgt aus der Gleichung

$$0 = (-1)^{(w_4)(e)'}C_4 dc_4 + (-1)^{(w_5)(e)'}C_5 dc_5 + (-1)^{(w_6)(e)'}C_6 dc_6$$

in welcher unter (e) die gerade Charakteristik $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$ verstanden ist, und die aus der KRAZER'schen Formel (C_4), (a. a. O., p. 39) hervorgeht, wenn man dieselbe unter Vertauschung der Indices 1, 2, 3 mit resp. 4, 5, 6 differentiirt und darauf $(\mu) = (0)$ und $(v) = (0)$ setzt.

Vertauscht man in jener KRAZER'schen Formel nur die Indices 2, 3 mit resp. 4, 6, so erhält man in gleicher Weise die Gleichung

$$0 = c_0 c_{25} c_{35} dc_1 + (-1)^{(w_1w_4)(ew_1w_5)'}c_{14}c_{26}c_{36}dc_4 + (-1)^{(w_1w_6)(ew_1w_5)'}c_{16}c_{24}c_{34}dc_6,$$

aus welcher wegen $dc_6 = 0$

$$c_1' = -(-1)^{(w_1w_4)(ew_1w_5)'} \frac{c_{14}c_{26}c_{36}}{c_0 c_{25} c_{35}} c_4'$$

folgt und mit Rücksicht auf (42) die bald zur Verwendung gelangende Relation

$$c_1' c_4' = -(-1)^{(w_1w_4)(ew_1w_5)'+(w_6)(w_4)'} \frac{c_0 c_{14} c_{15}^2 c_{25} c_{35}}{c_{16}^2 c_{26} c_{36}}. \tag{44}$$

§ 7.

Wir gehn zur Bestimmung von $R\cos\sigma$ und V über. Nach (15) war

$$cR\cos\sigma = q_1 q_2' - q_2 q_1',$$

also

$$cR\cos\sigma = \frac{i_1 i_2 c_4' c_5'}{c_0^2 \vartheta^2(k)(v)} [\vartheta(kw_5)(v).\vartheta'(kw_4)(v) - \vartheta(kw_4)(v).\vartheta'(kw_5)(v)];$$

für die Determinante kann man die Summe

$$A\vartheta(k)(v).\vartheta(kw_6)(v) + B\vartheta(kw_1)(v)\vartheta(kw_1w_6)(v)$$

setzen und in der üblichen Weise die unbestimmten Coefficienten A und B berechnen. Man findet

$$A = -(-1)^{(kw_1)(e)'+(kw_1w_5)(w_6)'} \frac{c_1' c_{16}}{c_{14} c_{15}}$$

und für B ein Product, das c_6' zum Factor hat und deshalb $= 0$ ist. Demnach

$$cR\cos\sigma = -i_1 i_2 (-1)^{(kw_1)(e)'+(kw_1w_5)(w_6)'} \frac{c_1' c_4' c_5' c_{16}}{c_{14} c_{15} c_0^2} \frac{\vartheta(kw_6)(v)}{\vartheta(k)(v)},$$

was mit Benutzung von (44) und (42) einen einfachern Ausdruck für $cR\cos\sigma$ liefert, den wir mit demjenigen für $cR\sin\sigma = q_1$ zusammenstellen:

$$\left|\begin{array}{l} cR\cos\sigma = e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_4)'} (-1)^{(kw_4)(e)'+(k)(w_6)'} \dfrac{C_5}{C_6} \dfrac{i_1 c_5'}{c_0} \dfrac{\vartheta(kw_6)(v)}{\vartheta(k)(v)}, \\ cR\sin\sigma = \qquad\qquad \dfrac{i_1 c_5'}{c_0} \dfrac{\vartheta(kw_5)(v)}{\vartheta(k)(v)}. \end{array}\right. \tag{45}$$

Bei der Bestimmung von V gehn wir von der Gleichung (14) aus:

$$c\frac{dV}{dv} = q_1^2$$

$$c\frac{dV}{dv} = -(-1)^{(k)(w_5)'}\frac{c_5'^2}{c_0^2}\cdot\frac{\vartheta^2(kw_5)(v)}{\vartheta^2(k)(v)}. \tag{46}$$

V ist einem Integral zweiter Gattung gleich; es muss sich demnach durch die partiellen Ableitungen des Logarithmus einer ϑ-Function darstellen lassen. Mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten leitet man folgende Formeln ab:

$$c_0^2\frac{\partial^2\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_1^2} = c_0 D_{11}c_0 + \sum{}^{i}(-1)^{(k)(w_i)'}(D_1c_i)^2\frac{\vartheta^2(kw_i)(v)}{\vartheta^2(k)(v)},$$

$$c_0^2\frac{\partial^2\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_1\partial v_2} = c_0 D_{12}c_0 + \sum{}^{i}(-1)^{(k)(w_i)'}D_1c_i.D_2c_i\cdot\frac{\vartheta^2(kw_i)(v)}{\vartheta^2(k)(v)},$$

$$c_0^2\frac{\partial^2\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_2^2} = c_0 D_{22}c_0 + \sum{}^{i}(-1)^{(k)(w_i)'}(D_2c_i)^2\frac{\vartheta^2(kw_i)(v)}{\vartheta^2(k)(v)},$$

$$(i = 4,\ 5,\ 6)$$

in welchen

$$D_{ik}c_0 = \left[\frac{\partial^2\vartheta(0)(v)}{\partial v_i\partial v_k}\right]_{(v)=(0)}.$$

ist.

Da

$$dv_1 = \Delta\,.\,D_2c_6\,.\,dv \quad\text{und}\quad dv_2 = -\Delta\,.\,D_1c_6\,.\,dv$$

ist, so folgt aus diesen, wenn man abgekürzt

$$D_1c_i\,.\,D_2c_k - D_1c_k\,.\,D_2c_i = [ik] = -[ki]$$

setzt:

$$\frac{c_0^2}{\Delta}\frac{d}{dv}\left[\frac{\partial\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_1}\right] = c_0[D_{11}c_0.D_2c_6 - D_{12}c_0.D_1c_6] + (-1)^{(k)(w_4)'}D_1c_4[46]\frac{\vartheta^2(kw_4)(v)}{\vartheta^2(k)(v)}$$
$$+ (-1)^{(k)(w_5)'}D_1c_5[56]\frac{\vartheta^2(kw_5)(v)}{\vartheta^2(k)(v)},$$

$$\frac{c_0^2}{\Delta}\frac{d}{dv}\left[\frac{\partial\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_2}\right] = c_0[D_{12}c_0.D_2c_6 - D_{22}c_0.D_1c_6] + (-1)^{(k)(w_4)'}D_2c_4[46]\frac{\vartheta^2(kw_4)(v)}{\vartheta^2(k)(v)}$$
$$+ (-1)^{(k)(w_5)'}D_2c_5[56]\frac{\vartheta^2(kw_5)(v)}{\vartheta^2(k)(v)},$$

und hieraus durch Elimination von $\vartheta^2(kw_4)(v)$:

$$\frac{c_0^2}{\Delta}\frac{d}{dv}\left[D_2c_4\frac{\partial\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_1}-D_1c_4\frac{\partial\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_2}\right]$$

$$=c_0\left[D_2c_4\{D_{11}c_0.D_2c_6-D_{12}c_0.D_1c_6\}-D_1c_4\{D_{12}c_0.D_2c_6-D_{22}c_0.D_1c_6\}\right]$$

$$+(-1)^{(k)(w_5)'}[54][56]\frac{\vartheta^2(kw_5)(v)}{\vartheta^2(k)(v)}.$$

Den aus dieser Gleichung folgenden Werth des letzten ϑ-Quotienten substituiren wir in (46) und finden nach der Integration V bis auf eine additive Constante bestimmt:

$$(47)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{[54][56]c_0c}{c_5'^2}V\\&=v\left[D_{11}c_0.D_2c_4.D_2c_6-D_{12}c_0.(D_2c_4.D_1c_6-D_1c_4.D_2c_6)+D_{22}c_0.D_1c_4.D_1c_6\right]\\&\quad-\frac{c_0}{\Delta}\left[D_2c_4\frac{\partial\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_1}-D_1c_4\frac{\partial\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_2}\right].\end{aligned}\right.$$

§ 8.

Die vollständige Integration der Differentialgleichungen (1) wird, wie schon in der Einleitung angedeutet wurde, bewirkt durch 9 ϑ-Quotienten, die den Bedingungsgleichungen einer orthogonalen Substitution genügen.

Auf die übersichtliche Darstellung der Quotienten der geraden ϑ-Functionen als Coefficienten einer rechtwinkligen Coordinatentransformation hat zuerst Herr Weber hingewiesen. Von seinen Ausdrücken (a. a. O., p. 181 (6)) ausgehend gelangt man, wenn man die besondern Annahmen über die Charakteristiken fallen lässt, durch Vermehrung der Argumente um das System halber, der Charakteristik (k) entsprechender Perioden zu dem System:

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned} l_h &= e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_4 w_h)'}(-1)^{(w_4)(w_h)'}\frac{c_{4h}\vartheta(kw_4w_h)(v)}{c_0\vartheta(k)(v)},\\ m_h &= e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_5 w_h)'}(-1)^{(w_5)(w_h)'}\frac{c_{5h}\vartheta(kw_5w_h)(v)}{c_0\vartheta(k)(v)},\\ n_h &= e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_6 w_h)'}(-1)^{(w_6)(w_h)'}\frac{c_{6h}\vartheta(kw_6w_h)(v)}{c_0\vartheta(k)(v)}, \end{aligned}\right. \qquad (h=1,2,3)$$

dessen orthogonalen Charakter man nachträglich am leichtesten mittelst der KRAZER'schen Formeln (B_4) und (C_4), (a. a. O., p. 35 und 39) verificirt. Der Nachweis, dass dasselbe die Gleichungen (1) befriedigt, rechtfertigt die Änderung, die an den WEBER'schen Ausdrücken vorgenommen wurde.[1]

---

[1] *Anmerkung.* Es sei mir an dieser Stelle die Notiz gestattet, dass die KRAZER-schen Formeln (B_2) und (C_2), (p. 35 und 37), an Inhalt und Umfang zu folgendem Theorem zusammengefasst werden können:

Bedeuten (ε) und (η) zwei beliebige Charakteristiken, w_0 die Charakteristik (0), u_1, u_2 und v_1, v_2 zwei Paare veränderlicher Argumente und wird

$$(-1)^{(w_\alpha)(w_\beta)'}e^{-\frac{\pi i}{2}(\varepsilon\eta)(w_\alpha w_\beta)'}\vartheta(\varepsilon w_\alpha w_\beta)(u).\vartheta(\eta w_\alpha w_\beta)(v)=\Theta_{\alpha\beta}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3\\ \beta=0,\ 4,\ 5,\ 6\end{pmatrix}$$

gesetzt, so bilden die 16 ϑ-Producte

$$\begin{array}{cccc}\Theta_{00} & \Theta_{04} & \Theta_{05} & \Theta_{06}\\ \Theta_{10} & \Theta_{14} & \Theta_{15} & \Theta_{16}\\ \Theta_{20} & \Theta_{24} & \Theta_{25} & \Theta_{26}\\ \Theta_{30} & \Theta_{34} & \Theta_{35} & \Theta_{36},\end{array}$$

einzeln dividirt durch einen gemeinsamen Nenner, die Coefficienten einer orthogonalen Substitution, deren Determinante den Werth

$$(-1)^{(w_1)(w_2)'+(w_4)(w_5)'}$$

hat.

Dieses Theorem ist zuerst von Herrn F. CASPARY aufgestellt worden, aber nur für besondere Werthe von (ε) und (η) (CRELLE's Journal, Bd. 94, p. 77).

Durch Differentiation erhält man

$$(48') \qquad \begin{cases} \dfrac{dl_h}{dv} = L'n_h - L''m_h, \\ \dfrac{dm_h}{dv} = L''l_h - Ln_h, \\ \dfrac{dn_h}{dv} = Lm_h - L'l_h; \end{cases} \qquad (h=1,2,3)$$

$$L = e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_4)'}(-1)^{(w_4)(w_5)'}\frac{c_4'\vartheta(kw_4)(v)}{c_0\vartheta(k)(v)},$$

$$L' = e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_5)'}(-1)^{(w_5)(w_6)'}\frac{c_5'\vartheta(kw_5)(v)}{c_0\vartheta(k)(v)},$$

$$L'' = e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_6)'}(-1)^{(w_6)(w_4)'}\frac{c_6'\vartheta(kw_6)(v)}{c_0\vartheta(k)(v)}.$$

Nun ist wegen $c_6' = 0$ auch $L'' = 0$ und dann, wie ein Vergleich mit (43) lehrt, $L = -q_2$ und $L' = iq_1$, mithin in der That (48′) identisch mit (1). In (48) hat man zwar nur ein particulares System von Integralgleichungen; man darf aber, wie in § 1 gezeigt wurde, ein solches wählen, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun.

Was ferner die Integration der Gleichungen (2) anbelangt, so führt der Umstand, dass man die dreifach periodischen Functionen p_1 und p_2 als Grenzfälle von vierfach periodischen ansehn kann, auf die Vermuthung, dass man durch einen Grenzübergang, der die vierfach periodischen Quotienten von (48) in dreifach periodische verwandelt, die Integralgleichungen von (2) wird gewinnen können. Man hat indessen nicht mit (48) selbst eine derartige Umformung vorzunehmen sondern mit einem abgeleiteten Systeme und zwar mit folgendem:

$$\begin{array}{ccc} \pm\frac{1}{l_1}, & \frac{il_2}{l_1}, & \frac{il_3}{l_1}, \\ \frac{im_1}{l_1}, & \frac{n_3}{l_1}, & -\frac{n_2}{l_1}, \\ \frac{in_1}{l_1}, & -\frac{m_3}{l_1}, & \frac{m_2}{l_1}. \end{array}$$

Auf die ausführliche Darstellung des Grenzübergangs verzichte ich; sie ist sehr umständlich und überdies von keinem Interesse, da das Endresultat mit Hilfe bekannter Formeln aus der Theorie der elliptischen ϑ-Functionen leicht zu verificiren ist. Ich erwähne nur, dass man die Moduln a_{12}, a_{22} und die Variable v_2 in bestimmter Weise in Null überzuführen und über den Werth von (k) und die Bedeutung der Charakteristiken w_i passend zu verfügen hat, um zu folgendem Systeme zu gelangen:

$$(49)\qquad \begin{cases} \lambda_h = \dfrac{\vartheta_h(a)\vartheta_h(u_1)}{\vartheta_{11}(a)\vartheta_{11}(u_1)}, \\ \mu_h = \dfrac{i\vartheta_h}{2\vartheta_{11}(a)\vartheta_{11}(u_1)}[e^{u_2}\vartheta_h(u_1+a)+e^{-u_2}\vartheta_h(u_1-a)], \\ \nu_h = -\dfrac{\vartheta_h}{2\vartheta_{11}(a)\vartheta_{11}(u_1)}[e^{u_2}\vartheta_h(u_1+a)-e^{-u_2}\vartheta_h(u_1-a)], \end{cases} \qquad (h=1,2,3)$$

worin

$$\vartheta_1(x)=\sqrt{i}\,\vartheta_{00}(x), \qquad \vartheta_2(x)=\vartheta_{01}(x), \qquad \vartheta_3(x)=\vartheta_{10}(x);$$

$$\vartheta_h=\vartheta_h(0)$$

ist.

Die Differentiation liefert

$$(49')\qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_h}{du} = \Lambda'\nu_h - \Lambda''\mu_h, \\ \dfrac{d\mu_h}{du} = \Lambda''\lambda_h - \Lambda\nu_h, \\ \dfrac{d\nu_h}{du} = \Lambda\mu_h - \Lambda'\lambda_h; \end{cases} \qquad (h=1,2,3)$$

$$\Lambda = +i\frac{du_1}{du}\left[\frac{du_2}{du_1}+\frac{\vartheta'_{11}(a)}{\vartheta_{11}(a)}\right],$$

$$\Lambda' = -i\frac{du_1}{du}\frac{\vartheta'_{11}}{2\vartheta_{11}(a)\vartheta_{11}(u_1)}[e^{u_2}\vartheta_{11}(u_1+a)+e^{-u_2}\vartheta_{11}(u_1-a)],$$

$$\Lambda'' = -i\frac{du_1}{du}\frac{\vartheta'_{11}}{2\vartheta_{11}(a)\vartheta_{11}(u_1)}[e^{u_2}\vartheta_{11}(u_1+a)-e^{-u_2}\vartheta_{11}(u_1-a)].$$

Die Berücksichtung der Gleichungen (32) und (33) erweist sofort die Identität der Systeme (49′) und (2). Die zu bestimmenden Werthe von λ_h, μ_h, ν_h sind also den Ausdrücken von (49) entweder direkt gleich, oder sie setzen sich aus diesen linear zusammen. Wir wollen zunächst das erstere annehmen und den Beweis dafür, dass diese Annahme die einzig zulässige ist, später geben.

§ 9.

Da nunmehr alle Quantitäten in ihrer Abhängigkeit von den Variabeln u und v dargestellt sind, so erübrigt nur noch die Aufstellung der Gleichungen für die Coordinaten X_1, X_2, X_3 eines Punktes der Fläche.

Setzt man

$$(50)\qquad \begin{cases} n_h R\cos\sigma - m_h R\sin\sigma = r_h \\ -im_h R\cos\sigma - in_h R\sin\sigma = t_h, \end{cases} \qquad (h=1,2,3)$$

so liefert (5) mit Berücksichtigung von (3):

$$(51)\qquad \begin{cases} X_1 - V = \dfrac{\Sigma_h t_h\lambda_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, \\ X_2 = -\dfrac{\Sigma_h r_h\nu_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, \\ X_3 = \dfrac{\Sigma_h r_h\mu_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, \end{cases} \qquad (h=1,2,3)$$

wobei noch zu bemerken ist, dass r_h einem ϑ-Quotienten gleich ist:

$$(52)\qquad r_h = -ie^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_h)'}(-1)^{(w_5)(e)'+(w_h)(w_4e)'}\cdot\frac{c_5'c_{51}c_{42}c_{43}}{cc_0^2c_{26}c_{36}}\frac{\vartheta(kw_h)(v)}{\vartheta(k)(v)}. \qquad (h=1,2,3)$$

Zum Schluss soll noch gezeigt werden, dass das Krümmungsmass der Fläche thatsächlich constant ist, und im Anschluss daran, dass die bezüglich der λ_h, μ_h, ν_h getroffene Verfügung eine nothwendige war.

Für P, f, Q und g bestehen die Gleichungen (6) und (7):

$$P = -p_1z_2 - p_2z_3 = -\frac{\Sigma_h n_h(p_2\mu_h - p_1\nu_h)}{\Sigma_h l_h\lambda_h} = -\frac{\Sigma_h n_h\pi_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}$$

$$f = PR\cos\sigma - MR\sin\sigma = -\frac{\Sigma_h(p_2\mu_h - p_1\nu_h)(R\cos\sigma n_h - R\sin\sigma m_h)}{\Sigma_h l_h\lambda_h} = -\frac{\Sigma_h r_h\pi_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}$$

$$Q = -q_1z_1 - q_2 = \frac{\Sigma_h\lambda_h(iq_1m_h - q_2l_h)}{\Sigma_h l_h\lambda_h} = \frac{\Sigma_h r_h'\lambda_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}$$

$$g = QR\cos\sigma + \frac{dV}{dv}y_1 - \frac{dR\sin\sigma}{dv} = \frac{\Sigma_h\lambda_h\left[R\cos\sigma r_h' + R\sin\sigma\dfrac{dl_h}{dv} - l_h\dfrac{dR\sin\sigma}{dv}\right]}{\Sigma_h l_h\lambda_h}$$

$$= \frac{\Sigma_h\lambda_h n_h'}{\Sigma_h l_h\lambda_h}.$$

Sucht man die neueingeführten Grössen π_h, r'_h, n'_h zu bestimmen, so findet man nach zum Teil höchst langwierigen Rechnungen:

$$\pi_1 = -\frac{\vartheta_1\vartheta_2(a)\vartheta_3(a)\vartheta'_{11}}{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta^2_{11}(a)}\frac{du_1}{du}\cdot\frac{\vartheta_1(u_1)}{\vartheta_{11}(u_1)} \quad \text{etc.}$$

$$r'_1 = -e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_1)'}(-1)^{(w_5)(w_6w_1)'+(w_1w_5)(w_4e)'}\frac{c'_5c_{51}c_{62}c_{63}}{c_0^2c_{42}c_{43}}\frac{\vartheta(kw_1)(v)}{\vartheta(k)(v)} \quad \text{etc.}$$

$$n'_1 = -e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_1w_4)'}(-1)^{(w_4)(w_1)'+(k)(w_6e)'}\frac{i_1c'_5c'_5c^2_{41}}{cc_0^3c_{61}}\frac{\vartheta(kw_1w_6)(v)}{\vartheta(k)(v)} \quad \text{etc.}$$

oder, wenn man die Gleichungen (29) und (36) zuzieht und abkürzend

$$\frac{ic}{k^2s_h} = \tau_h$$

setzt:

$$\pi_h = -\tau_h\lambda_h, \qquad r'_h = k\tau_h r_h, \qquad n'_h = \tau_h n_h.$$

Mithin ist

$$P = \frac{\Sigma_h n_h\lambda_h\tau_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, \qquad f = \frac{\Sigma_h r_h\lambda_h\tau_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, \qquad Q = k\frac{\Sigma_h r_h\lambda_h\tau_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, \qquad g = \frac{\Sigma_h n_h\lambda_h\tau_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}.$$

Hieraus folgt (8): $PQ = kfg$, worin sich die Constanz des Krümmungsmasses ausspricht.

Hätte man aber λ_h, μ_h, ν_h zu ersetzen durch resp.

$$a_{h1}\lambda_1 + a_{h2}\lambda_2 + a_{h3}\lambda_3$$
$$a_{h1}\mu_1 + a_{h2}\mu_2 + a_{h3}\mu_3$$
$$a_{h1}\nu_1 + a_{h2}\nu_2 + a_{h3}\nu_3,$$

so würde auch π_h in

$$a_{h1}\pi_1 + a_{h2}\pi_2 + a_{h3}\pi_3 = -a_{h1}\tau_1\lambda_1 - a_{h2}\tau_2\lambda_2 - a_{h3}\tau_3\lambda_3$$

übergehen, und man erhielte für P, f, Q und g die Ausdrücke:

$$P = \frac{\Sigma_h\Sigma_k a_{hk}n_k\lambda_k\tau_k}{\Sigma_h\Sigma_k a_{hk}l_k\lambda_k},$$

$$f = \frac{\Sigma_h\Sigma_k a_{hk}r_k\lambda_k\tau_k}{\Sigma_h\Sigma_k a_{hk}l_k\lambda_k}, \qquad (h, k = 1, 2, 3)$$

$$Q = k\frac{\Sigma_h\Sigma_k a_{hk}r_k\lambda_k\tau_k}{\Sigma_h\Sigma_k a_{hk}l_k\lambda_k},$$

$$g = \frac{\Sigma_h\Sigma_k a_{hk}n_k\lambda_k\tau_k}{\Sigma_h\Sigma_k a_{hk}l_k\lambda_k}.$$

Die Gleichungen (9)

$$P = g, \qquad Q = kf$$

würden dann die Relationen

$$a_{hk}(\tau_h - \tau_k) = 0$$

zur Folge haben, die ihrerseits

$$a_{hk} = 0 \qquad (h \gtrless k)$$

ergeben müssen, weil im allgemeinen τ_h nicht gleich τ_k ist.

LEBENSLAUF.

Ich, HERMANN DOBRINER, geb. am 5. November 1857 zu Schmalleningken, Reg.-Bezirk Gumbinnen, besuchte seit Ostern 1867 das Realgymnasium auf der Burg zu Königsberg i. Pr. und studierte daselbst nach abgelegtem Abiturienten-Examen von Michaelis 1875 bis Ostern 1880 Mathematik und Physik. Diese neun Semester hindurch war ich Mitglied des mathematischen, und während fünf Semester auch des physikalischen Seminars. Ausserdem habe ich Vorlesungen gehört bei den Herren: ARNOLDT, LUTHER, NEUMANN, QUÄBICKER, ROSENHAIN, SAALSCHÜTZ, VOIGT, WEBER. Besonders den beiden letztgenannten fühle ich mich zu grossem Danke verpflichtet.

Im Februar 1881 bestand ich das Examen pro facultate docendi, absolvierte von Michaelis 1881 bis 1882 mein pädagogisches Probejahr an der FRIEDRICHS-WERDER'schen Ober-Realschule zu Berlin und war an dieser Anstalt als Hilfslehrer thätig, bis mir Ostern 1883 eine Lehrerstelle an der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt a. M. übertragen wurde.

Das examen rigorosum bestand ich am 5. Juli 1886.